

Практическая работа №4: Интерполирование функций

Цель работы

Научиться применять интерполирование функции для решения практических задач, овладеть навыками применения интерполяционных формул Лагранжа заданной степени, многочленов Ньютона. Научиться оценивать погрешности интерполяционных формул и работать в программных пакетах с целью проверки полученных результатов.

Основные теоретические положения

Пусть значение $f(x)$ известно в некоторых точках $X = \{x_j\}_{j=0}^n$, и необходимо найти $f(x_i)$: $x_i \notin X$. Для этих целей, функцию $f(x)$ приближают функцией $L_n(x)$: $L_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k$, где φ – произвольный базис, удобный для данной $f(x)$. Задача интерполяции – найти обобщённый многочлен. Существует несколько способов нахождения, например, метод Лагранжа. Он даёт готовый интерполяционный многочлен Лагранжа: $L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \ell_i(x)$, где $f_i = f(x_i)$ – значение функции в узле x_i , а $\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$ – i -ый базисный полином.

Если узлы, в которых определено значение $f(x_i)$ являются равноотстоящими, т.е. $x_i = x_0 + ih$, $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, $i = 1..n$, тогда можно воспользоваться интерполяционным многочленом Ньютона: $N_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f_0}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (q - j + 1)$, где $\Delta^k f$ – конечная разность k -го порядка, $q = (x - x_0)/h$.

Многочлен Чебышёва первого рода $T_n(x)$ характеризуется как многочлен степени n со старшим коэффициентом 2^{n-1} , который меньше всего отклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$: $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Для натурального n узлы на промежутке $x \in [-1, 1]$ задаются формулой: $x_k = \cos(\frac{\pi}{2n+1} (2k-1))$, $k = 1..n$. Это корни многочлена Чебышёва первого рода степени n .

Для получения узлов на произвольном отрезке $[a, b]$, можно применить следующую формулу: $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos(\frac{\pi}{2n+1} (2k-1))$, $k = 1..n$. После нахождения интерполяционного многочлена, необходимо вычислить и оценить его погрешность. Должно выполняться следующее неравенство: $\max_{x \in [a, b]} |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)| = Q_n$, где $[a, b]$ – промежуток интерполирования, $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$, $M_{n+1} = \max_{\eta \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\eta)|$, $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$. Левая часть неравенства является практической погрешностью, а правая – теоретической.

Постановка задачи

Построить интерполяционный многочлен по 2, 3, 4, 5 и 6 узлам (равноотстоящим и

чебышёвским) для функции $f(x) = \frac{A}{x^2 + px + q}$ на промежутке $[a, b]$ по равноотстоящим и по чебышёвским узлам. Найти фактическую погрешность и сравнить её с теоретической оценкой.

Порядок выполнения работы

1. Реализовать функцию $f()$ для вычисления значений в функции $f(x)$.
2. Реализовать функцию $df()$, вычисляющая n -ую производную функции $f(x)$.
Данную функцию можно реализовать с помощью `switch`, предварительно посчитав производные в символьном виде, например, в Wolfram.
3. Реализовать функцию, вычисляющую интерполяционный многочлен по методу Лагранжа `lagrange()` (для нечётных вариантов) или Ньютона `newti()` (для чётных вариантов).
4. Построить график полученного интерполяционного многочлена n -го порядка по равномерной сетке и функции $f(x)$ в одном окне. Отметить на графике узлы интерполяции. Выписать полученный интерполяционный многочлен с точностью коэффициентов до 7 знаков после запятой.
5. Аналогично выполнить построение для чебышёвской сетки.
6. Заполнить таблицу для каждой сетки и сделать выводы:

Значение n	1	2	3	4	5
Значение M_{n+1}					
Значение $\max \omega_{n+1}(x) $					
Значение $(n+1)!$					
Значение Q_n					
Значение $\max R_n(x) $					

Варианты заданий

Выполнение работ осуществляется по индивидуальным вариантам заданий (коэффициентам функции). Номер варианта для каждого студента определяется преподавателем.

[task4-vars](#)

Содержание отчёта

- Цель работы.
- Краткое изложение основных теоретических понятий.
- Постановка задачи с кратким описанием порядка выполнения работы.
- Графики интерполяционных многочленов и их вид.
- Таблицы для оценки погрешности.
- Общий вывод по проделанной работе.
- Код программы.

From:

<http://se.moevm.info/> - **se.moevm.info**

Permanent link:

http://se.moevm.info/doku.php/courses:computational_mathematics:prac4?rev=1650130831

Last update: **2022/12/10 09:08**

