Санкт-Петербургский государственный университет
Научно-исследовательский институт менеджмента

НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ

Н. В. Хованов, Ю. В. Федотов

МОДЕЛИ УЧЕТА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ СВОДНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СЛОЖНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

№ 28(R)–2006

Санкт-Петербург
2006

Н. В. Хованов, Ю. В. Федотов. Модели учета неопределенности при построении сводных показателей эффективности деятельности сложных производственных систем. Научные доклады № 28(R)–2006. СПб.: НИИ менеджмента СПбГУ, 2006.

Анализируются различные подходы к адаптации известного метода сводных показателей (МСП) к его использованию в условиях неопределенности. Такая необходимость учета неопределенности возникает по причине дефицита числовой информации, имеющего место на любом этапе построения сводной оценки качества объектов электроэнергетики на основе системы исходных характеристик, каждая из которых необходима, а все они вместе достаточны для определения уровня оцениваемого качества сложного объекта.
Для моделирования указанного дефицита числовой информации предлагается использовать процедуру байесовской рандомизации неопределенности. В результате ее применения отдельные показатели, весовые коэффициенты и сводные показатели превращаются в соответствующие случайные величины. Теперь задача сравнения уровня качества двух объектов сводится к задаче выявления того или иного вида стохастического доминирования между соответствующими рандомизированными сводными показателями. Для программной реализации описанного метода рандомизированных сводных показателей (МРСП) разработана дискретная модель весовых коэффициентов, позволяющая генерировать все возможные значения сводных показателей путем направленного полного перебора допустимых наборов этих коэффициентов. Программная реализация метода перебора возможных значений сводных показателей позволяет учитывать дополнительную экспертную информацию, задаваемую в виде системы неравенств для допустимых значений весовых коэффициентов. Такая нечисловая экспертная информация позволяет существенно повысит точность и достоверность получаемых рандомизированных оценок сводных показателей качества объектов.

Хованов Николай Васильевич — д.э.н., профессор кафедры экономической кибернетики экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Федотов Юрий Васильевич — к.э.н., доцент, заведующий кафедрой государственного и муниципального управления факультета менеджмента Санкт-Петербургского государственного университета.

Saint Petersburg State University
Institute of Management

DISCUSSION PAPER

Nikolai Hovanov, Yuri Fedotov

COMPLEX PRODUCTION SYSTEMS' PERFORMANCE MEASUREMENT: ESTIMATION OF AGGREGATE INDICES UNDER UNCERTAINTY

28(R)–2006

Saint Petersburg
2006

Nikolai Hovanov, Yuri Fedotov. Complex Production Systems' Performance Measurement: Estimation of Aggregate Indices under Uncertainty. Discussion Paper #28(R)–2006. Institute of Management, Saint Petersburg State University: St. Petersburg, 2006.

The paper deals with approaches utilized for adjustment of well known Method of Aggregate Indices (MAI) to uncertainty conditions. The necessity for such adjustments occurs because of the shortage of numeric information. It appears at any stage of estimation of the aggregate quality index for operating electricity units when respective measure (index) integrates a system of object's parameters. Each parameter is required for ultimate quality appraisal, and taken together they are supposed to be sufficient for estimating quality level of the analyzed unit.
The Baye's uncertainty randomization procedure is proposed as a tool to simulate the shortage of numeric information. Through this procedure separate indices, weight coefficients and aggregated indices are transformed into correspondent random magnitudes. Then, comparing the qualities of any two objects is converted in the problem of revealing a certain type of stochastic dominance between respective randomized aggregate indices.
The software implementation of described above method of Randomized Aggregated Indices Method (RAIM) is based on discrete model of weight coefficients, which allows for generation of all their possible meanings by directed calibration of all feasible bundles of the coefficients.
The software implementation of full calibration of possible values for the aggregate indices permits consideration of additional information supplied by experts. It is shaped as a system of inequalities for feasible values of the weight coefficients. Such nonnumeric information from experts substantially increases the accuracy and reliability of constructed randomized estimates of the objects' aggregate quality indices.

Hovanov, Nikolai V. — Professor, Department of Economic Cybernetics, Faculty of Economy St.Petersburg State University.

Fedotov, Yuri V. — Associate Professor, Chair of Public Administration Department, School of Management, St.Petersburg State University.

Содержание

Введение

В этой части доклада анализируется одно из основных теоретических положений, используемых в докладе — модель неопределенности задания сводного показателя многопараметрического объекта (сложного объекта электроэнергетики, например). В пункте 2.1 для всех этапов построения сводного показателя строится унифицированная стохастическая модель, базирующаяся на идее, восходящей к известной работе Т. Байеса, который предлагал моделировать неопределенность при помощи ее рандомизации. Эта модель, согласно которой неопределенный выбор какого либо математического объекта (нормирующей функции $q_i = q_i(x_i)$, агрегирующей функции $Q(q)$, вектора весовых коэффициентов $w=(w_1,...,w_m)$ и т.д.) из фиксированного множества моделируется случайным выбором из этого множества, подробно развивается для наиболее важного для нашей темы случая, когда моделируется неопределенность задания вектора весовых коэффициентов $w = (w_1,..., w_m)$ с дискретными компонентами (см. пункт 2.2). Построенная модель неопределенности задания вектора дискретных весовых коэффициентов модифицируется, далее, для целей учета дополнительной нечисловой (ординальной, порядковой), неточной (интервальной) и неполной информации о сравнительной значимости отдельных показателей сложного объекта (см. пункт 2.3).

Стохастическая модель неопределенности задания сводного показателя

Анализ рассмотренных практических методик построения сводных показателей показывает, что *неопределенность* подстерегает исследователя на каждой стадии формирования синтетической оценки. Рассмотрим подробнее возможные подходы к построению математических моделей этой "неопределенности", позволяющих обобщить метод сводных показателей (МСП) на случай, когда компоненты сводного показателя строятся в условиях дефицита информации об их точном виде.

Если считать заданным вектор исходных числовых характеристик $x=(x_1,...,x_m)$ оцениваемых объектов (сложных энергетических систем, например), каждая из которых измеряется по некоторой числовой шкале $\varphi_i(R^1)$, порожденной непрерывным строго возрастающим отображением $\varphi : R^1 \to R^1$ (см. пункт 1.1), то построение сводного показателя Q можно представить в виде последовательности следующих трех шагов (см., например, [1,2,4,5,6,7,9-12,45,47,49]).

1. Выбираются нормирующие функции $q_i(\varphi_i(x_i))$, $i=1,...,m$, преобразующие исходные характеристики, измеренные по соответствующим числовым шкалам, в отдельные показатели $q_i = q_i(\varphi_i(x_i))$, $q_i \in [0,1]$; теперь j-й объект, описываемый вектором значений исходных характеристик $x^{(j)} = (x_1^{(j)},...,x_m^{(j)})$, $j=1,...,k$ (k - число рассматриваемых объектов), получает многокритериальную оценку $q^{(j)} = (q_1^{(j)},...,q_m^{(j)})$, $q_i = q_i(\varphi_i(x_i))$, $j=1,...,k$ ($q^{(j)} = (q_1^{(j)},...,q_m^{(j)})$ - значение вектора переменных $q=(q_1,...,q_m)$).

2. Выбирается вид синтезирующей (агрегирующей) функции $Q = Q(q) = Q(q_1,...,q_m)$, представляющей собой отображение $Q:[0,1]^m \to [0,1]$ m-мерного единичного куба $[0,1]^m \subset R^m$ в единичный отрезок $[0,1] \in R^1$, удовлетворяющее условию монотонности и элементарным краевым условиям (см. пункт 1.3). Синтезирующая функция сопоставляет j-му объекту (сложному энергетическому комплексу, например), имеющему многокритериальную оценку $q^{(j)} = (q_1^{(j)},...,q_m^{(j)})$, сводные показатели вида $Q(q^{(j)}) = Q(q_1^{(j)},...,q_m^{(j)})$.

3. Синтезирующая функция $Q = Q(q;w)$, описываемая вектором параметров $w=(w_1,...,w_m)$, $w_i \ge 0$, $w_1+...+w_m = 1$, интерпретируемым как вектор весовых коэффициентов, получает однозначную идентификацию при фиксации конкретного вектора весовых коэффициентов $w^{(0)} = (w_1^{(0)},...,w_m^{(0)})$. Теперь j-му объекту (сложному энергетическому комплексу), имеющему многокритериальную оценку $q^{(j)} = (q_1^{(j)},...,q_m^{(j)})$, однозначно сопоставляется значение $Q^{(i)} = Q(q^{(j)};w^{(0)})$ сводного показателя $Q(q;w^{(0)})$.

Таким образом, для построения сводной оценки данного объекта, описываемого вектором значений исходных характеристик $x^{(j)} = (x_1^{(j)},...,x_m^{(j)})$, исследователю необходимо однозначно определить следующие математические объекты:

1)непрерывные строго возрастающие функции $y_i = \varphi_i(x_i)$, $i=1,...,m$, определяющие шкалы, по которым измеряются исходные характеристики;

2)нормирующие функции $q_i = q_i(y_i) \in [0,1]$, $i=1,...,m$, превращающие исходные характеристики в отдельные показатели;

3)синтезирующую m-местную функцию $Q = Q(q) \in [0,1]$, определяющую вид сводного показателя;

4) m-мерный вектор весовых коэффициентов $w=(w_1,...,w_m)$, являющихся параметрами синтезирующей функции: $Q=Q(q;w)$.

После однозначного определения указанных математических объектов (общим числом $2m+2$) мы получаем однозначную числовую сводную оценку

$$Q^{(j)} = Q(q^{(j)};w) = Q(q(\varphi(x^{(j)}));w) = Q(q_1(\varphi_1(x_1^{(j)})),...q_m(\varphi_m(x_m^{(j)}));w) \qquad (1)$$

объекта, описываемого вектором значений исходных характеристик $x^{(j)}=(x_1^{(j)},...,x_m^{(j)})$.

К сожалению, на практике обычно приходится строить сводный показатель в условиях неопределенности, выражающейся в том, что все указанные компоненты МСП определены не однозначно, а "с точностью до множества". Точнее, обычно имеет место по крайней мере одно из следующих обстоятельств:

1) про функцию $y_i=\varphi_i(x_i)$ известно только то, что она принадлежит некоторому классу функций $\breve{\varphi}_i=\{\varphi_i^{(l)}(x_i), l\in L\}$, $i=1,...,m$;

2) про функцию $q_i=q_i(y_i)\in[0,1]$ известно только то, что она принадлежит некоторому классу функций $\breve{q}_i=\{q_i^{(r)}(y_i), r\in R\}$, $i=1,...,m$;

3) про функцию $Q=Q(q)\in[0,1]$ известно только то, что она принадлежит некоторому классу m-местных функций $\breve{Q}=\{Q^{(s)}, s\in S\}$;

4) про вектор $w=(w_1,...,w_m)$ известно только то, что он принадлежит некоторому множеству векторов $\breve{w}=\{w^{(u)}, u\in U\}$.

Наличие такой неопределенности задания сводного показателя ведет к тому, что объекту, описываемому вектором значений исходных характеристик $x^{(j)}=(x_1^{(j)},...,x_m^{(j)})$, сопоставляется не одна сводная оценка, но целое множество $\breve{Q}_j=\{Q_j^{(t)}, t\in T\}$ таких оценок.

В теории вероятностей, в теории игр, в теории принятия решений и в других областях математики уже давно разработан подход к моделированию неопределенности выбора конкретного элемента z из множества таких элементов $Z=\{x^{(\theta)}, \theta\in\Theta\}$ при помощи *рандомизации* этого выбора, проводимой путем задания на некоторой системе подмножеств множества Z вероятностной меры (см. [49]). В результате мы получаем *случайный* (*рандомизированный*) элемент $\tilde{z}$, принимающий значения из множества Z. При *рандомизации неопределенности*, в зависимости от природы элементов, составляющих множество Z, могут получиться случайные величины ($z\in R^1$), случайные вектора ($z\in R^m$), стохастические процессы (Z — множество одноместных функций), стохастические поля (Z — множество многоместных функций) и другие случайные математические объекты.

Рандомизируя неопределенность, связанную с построением сводного показателя, мы получаем следующие стохастические объекты:

1) стохастический процесс $\tilde{y}_i = \tilde{\varphi}_i(x_i)$ с реализациями из множества функций $\breve{\varphi}_i = \{\varphi_i^{(l)}(x_i), l \in L\}$, $i = 1,...,m$;

2) стохастический процесс $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(y_i)$ с реализациями из множества функций $\breve{q}_i = \{q_i^{(r)}(y_i), r \in R\}$, $i = 1,...,m$;

3) стохастическое поле $\tilde{Q} = \tilde{Q}(q)$ с реализациями из множества m-местных функций $\breve{Q} = \{Q^{(s)}, s \in S\}$;

4) случайный вектор (случайную m-мерную величину) $\tilde{w} = (\tilde{w}_1,...,\tilde{w}_m)$ с реализациями из множества $\breve{w} = \{w^{(u)}, u \in U\}$.

Подставляя введенные стохастические процессы, стохастическое поле и случайный вектор в формулу (1), получаем *рандомизированную сводную оценку* (*рандомизированный сводный показатель*)

$$\tilde{Q}^{(j)} = \tilde{Q}(\tilde{q}^{(j)};\tilde{w}) = \tilde{Q}(\tilde{q}(\tilde{\varphi}(x^{(j)}));\tilde{w}) = \tilde{Q}(\tilde{q}_1(\tilde{\varphi}_1(x_1^{(j)})),...,\tilde{q}_m(\tilde{\varphi}_m(x_m^{(j)}));\tilde{w}) \qquad (2)$$

объекта (сложного энергетического комплекса, например), описываемого вектором значений исходных характеристик $x^{(j)} = (x_1^{(j)},...,x_m^{(j)})$.

Таким образом, оценкой j-го объекта становится случайная величина $\tilde{Q}^{(j)}$, а сравнение j-го и l-го объектов, описываемых векторами исходных характеристик $x^{(j)} = (x_1^{(j)},...,x_m^{(j)})$ и $x^{(l)} = (x_1^{(l)},...,x_m^{(l)})$ соответственно, сводится, тем самым, к сравнению случайных величин (рандомизированных сводных показателей) $\tilde{Q}^{(j)}$ и $\tilde{Q}^{(l)}$. Такая редукция задачи оценивания и сравнения сложных многопараметрических объектов к задаче оценивания и сравнения соответствующих рандомизированных сводных показателей (случайных сводных оценок) и составляет сущность *метода рандомизированных сводных показателей* (МРСП), основанного на модели рандомизации неопределенности, имеющей место на разных этапах построения сводных показателей (см. [49]).

В качестве простейшей и, в некотором смысле, "естественной" детерминированной оценки рандомизированного сводного показателя $\tilde{Q}^{(j)}$ можно использовать математическое ожидание

$$\overline{Q}^{(j)} = M\,\tilde{Q}^{(j)} = M\,\tilde{Q}(\tilde{q}(\tilde{\varphi}(x^{(j)}))) \qquad (3)$$

этой случайной величины. Тогда мерой точности оценки $\overline{Q}^{(j)}$ может служить стандартное отклонение

$$S^{(j)} = \sqrt{D\,\tilde{Q}^{(j)}} = \sqrt{D\,\tilde{Q}(\tilde{q}(\tilde{\varphi}(x^{(j)})))} \qquad (4)$$

случайной величины $\widetilde{Q}^{(j)}$.

Среди различных отношений стохастического доминирования между случайными величинами $\widetilde{Q}^{(j)}$, $\widetilde{Q}^{(l)}$ простейшим является доминирование "в среднем" (обзор различных видов отношения стохастического доминирования см., например, в работах [18,29,51,60,65,66,68,69]). Определим утверждение "рандомизированный сводный показатель $\widetilde{Q}^{(j)}$ доминирует в среднем рандомизированный сводный показатель $\widetilde{Q}^{(l)}$" (обозначается "$\widetilde{Q}^{(j)} \overset{M}{\succ} \widetilde{Q}^{(l)}$") следующим соотношением

$$(\widetilde{Q}^{(j)} \overset{M}{\succ} \widetilde{Q}^{(l)}) \Leftrightarrow (M\widetilde{Q}^{(j)} > M\widetilde{Q}^{(l)}) \Leftrightarrow (\overline{Q}^{(j)} > \overline{Q}^{(l)}). \tag{5}$$

Наряду с простейшим отношением доминирования в среднем, большой популярностью пользуется отношение "доминирования по вероятности", обладающее рядом важных теоретико-вероятностных свойств (см., например, [51,60,65,66]). Определим утверждение "рандомизированный сводный показатель $\widetilde{Q}^{(j)}$ доминирует по вероятности рандомизированный сводный показатель $\widetilde{Q}^{(l)}$ на уровне достоверности α" (обозначается "$\widetilde{Q}^{(j)} \overset{P,\alpha}{\succ} \widetilde{Q}^{(l)}$") следующим соотношением

$$(\widetilde{Q}^{(j)} \overset{P,\alpha}{\succ} \widetilde{Q}^{(l)}) \Leftrightarrow (P(\{\widetilde{Q}^{(j)} > \widetilde{Q}^{(l)}\}) > \alpha), \tag{6}$$

где $P(\{\widetilde{Q}^{(j)} > \widetilde{Q}^{(l)}\})$ есть вероятность стохастического неравенства $\widetilde{Q}^{(j)} > \widetilde{Q}^{(l)}$, а параметр α берется из отрезка $[0,1]$. Вероятность $P(j,l) = P(\{\widetilde{Q}^{(j)} > \widetilde{Q}^{(l)}\})$ можно интерпретировать как *достоверность доминирования* рандомизированного сводного показателя $\widetilde{Q}^{(j)}$ над рандомизированным сводным показателем $\widetilde{Q}^{(l)}$.

Таким образом, в своем простейшем варианте МРСП подсчитывает для k оцениваемых объектов, описываемых векторами $x^{(j)} = (x_1^{(j)},\dots,x_m^{(j)})$, $j = 1,\dots,k$, исходных характеристик, следующие величины:

1) искомые сводные оценки объектов: $\overline{Q}^{(j)}$, $j = 1,\dots,k$;
2) меры точности оценок $\overline{Q}^{(j)}$: $S^{(j)}$, $j = 1,\dots,k$;
3) меры достоверности попарного доминирования: $P(j,l)$, $j,l = 1,\dots,k$.

Имея эти величины, исследователь может рейтинговать исследуемые объекты (например, при помощи ранжировки по убыванию сводных оценок $\overline{Q}^{(j)}$), оценить точность полученных оценок (по стандартным отклонениям $S^{(j)}$) и определить достоверность полученной ранжировки объектов (по достоверностям доминирования $P(j,l)$).

Разумеется, подсчет величин $\overline{Q}^{(j)}$, $S^{(j)}$, $P(j,l)$ для рандомизированных сводных показателей, определяемых формулой (2), весьма затруднен. Действительно, случайная сводная оценка $\widetilde{Q}^{(j)}$ является "стохастическим монстром" $\widetilde{Q}(\widetilde{q}(\widetilde{\varphi}(x^{(j)}));\widetilde{w})$, получившимся в результате четырехкратной рандомизации (по $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{q}$, $\widetilde{w}$, $\widetilde{Q}$), и для нахождения искомых величин необходимо знать совместную функцию распределения для $3m+1$ случайных величин ($\widetilde{\varphi}_i$, $\widetilde{q}_i$, $\widetilde{w}_i$, $i=1,...,m$, $\widetilde{Q}$). Поэтому мы постараемся далее последовательно упростить задачу подсчета величин $\overline{Q}^{(j)}$, $S^{(j)}$, $P(j,l)$ за счет введения ряда дополнительных предположений.

Из бесконечного многообразия синтезирующих (агрегирующих) функций, удовлетворяющих введенным в пункте 1.3 условиям (5), (6), можно выделить класс обобщенных взвешенных средних, дающих рандомизированные сводные показатели вида

$$\widetilde{Q}(\widetilde{q}(\widetilde{\varphi}(x));\widetilde{w}) = Q(\widetilde{q}(\widetilde{\varphi}(x));\widetilde{w};\widetilde{\psi}) = \widetilde{\psi}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m}\widetilde{w}_i\,\widetilde{\psi}(\widetilde{q}_i(\widetilde{\varphi}_i(x_i)))\right), \tag{7}$$

где $\widetilde{u}=\widetilde{\psi}(v)$ - некоторый стохастический процесс, реализации которого суть непрерывные строго возрастающие функции; $\widetilde{v}=\widetilde{\psi}^{-1}(u)$ - стохастический процесс, реализациями которого служат непрерывные строго возрастающие функции $v=\psi^{-1}(u)$, обратные к функциям $u=\psi(v)$.

Уменьшим неопределенность выбора функции $u=\psi(v)$, моделируемую стохастическим процессом $\widetilde{u}=\widetilde{\psi}(v)$, зафиксировав вид функции ψ. А именно, положим, что эта функция - степенная: $u=\psi(v)=u^{\lambda}$, $\lambda>0$, $v=\psi^{-1}(u)=\sqrt[\lambda]{u}$. В результате такого упрощающего предположения получаем рандомизированное взвешенное степенное среднее

$$\widetilde{Q}(\widetilde{q}(\widetilde{\varphi}(x));\widetilde{w}) = Q(\widetilde{q}(\widetilde{\varphi}(x));\widetilde{w},\widetilde{\lambda}) = \left(\sum_{i=1}^{m}\widetilde{w}_i\,\widetilde{q}_i^{\,\widetilde{\lambda}}(\widetilde{\varphi}_i(x_i))\right)^{1/\widetilde{\lambda}}. \tag{8}$$

Снимем, далее, совсем неопределенность выбора вида синтезирующей функции, выбрав конкретное значение параметра $\lambda=1$, и получив, тем самым, рандомизированное взвешенное среднее арифметическое

$$Q_+(\widetilde{q}(\widetilde{\varphi}(x);\widetilde{w}) = \sum_{i=1}^{m}\widetilde{w}_i\,\widetilde{q}_i(\widetilde{\varphi}_i(x_i)). \tag{9}$$

Далее мы будем полагать, что имеем дело с рандомизированным аддитивным сводным показателем вида

$$\widetilde{Q}_+(q) = Q_+(q;\widetilde{w}) = Q_+(q_1,\ldots,q_m;\widetilde{w}_1,\ldots,\widetilde{w}_m) = \sum_{i=1}^{m}\widetilde{w}_i\, q_i\,. \qquad (10)$$

Иными словами, предполагается, что имеется *дефицит информации* только о точных числовых значениях весовых коэффициентов, моделируемый при помощи вектора рандомизированных весовых коэффициентов $\widetilde{w} = (\widetilde{w}_1,\ldots, \widetilde{w}_m)$.

Однако даже такая упрощенная модель неопределенности, имеющей место при построении сводных оценок сложных объектов, может оказаться весьма плодотворной, поскольку она дает исследователю возможность изучать наиболее тонкий и деликатный момент метода сводных показателей - момент задания числовых значений весовых коэффициентов, определяющих значимость отдельных показателей, синтезируемых в единый сводный показатель.

Дискретная модель задания неопределенностивесовых коэффициентов

Итак, мы остановились на аддитивной свертке $Q_+(q;w)$ отдельных показателей $q_1,\ldots,q_m$ функционирования оцениваемых объектов (сложных систем электроэнергетики). При этом предполагается, что вектор весовых коэффициентов $w = (w_1,\ldots, w_m)$ задан с точностью до некоторого множества векторов $W = \{w^{(t)} = (w_1^{(t)},\ldots, w_m^{(t)}), t \in T\}$, т.е. предполагается, что синтез сводных оценок происходит в условиях неопределенности задания весовых коэффициентов.

Для построения дискретной модели неопределенности задания весовых коэффициентов предположим, что каждый из этих коэффициентов измеряется с точностью до конечного шага $h = 1/n$, определяемого натуральным числом $n > 1$. Иными словами, предполагается, что весовые коэффициенты могут принимать только дискретные значения:

$$w_i \in w(n) = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{l}{n}, \ldots, \frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}, 1\right\} \qquad (1)$$

Тогда *множество всех возможных векторов весовых коэффициентов*

$$W(m,n) = \left\{w^{(t)} = (w_1^{(t)},\ldots,w_m^{(t)}), w_i^{(t)} \in w(n), w_1^{(t)} + \ldots + w_m^{(t)} = 1, t \in T(m,n)\right\}, \qquad (2)$$

где $T(m,n)=\{1,\ldots,N(m,n)\}$ есть множество возможных значений индекса t, является конечным множеством, содержащим число элементов $N(m,n)$, равное

$$N(m,n)=\binom{n+m-1}{n}=\binom{n+m-1}{m-1}=\frac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}. \qquad (3)$$

Рандомизируем неопределенность выбора конкретного вектора весовых коэффициентов $w^{(t)}$ из множества всех возможных векторов весовых коэффициентов $W(m,n)$ при помощи случайного индекса $\tilde{t}$, равномерно распределенного на множестве $T(m,n)=\{1,\ldots,N(m,n)\}$:

$$P(\{\tilde{t}=t\})=\frac{1}{N(m,n)},\quad t\in N(m,n)=\{1,\ldots,N(m,n)\}. \qquad (4)$$

В результате получаем *рандомизированный вектор весовых коэффициентов* $\tilde{w}=(\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_m)$, индуцированный случайным индексом $\tilde{t}$ по формуле

$$\tilde{w}=(\tilde{w}_1,\ldots,\tilde{w}_m)=w^{(\tilde{t})}=(w_1^{(\tilde{t})},\ldots,w_m^{(\tilde{t})}) \qquad (5)$$

и равномерно распределенный на множестве $W(m,n)$ (см. [17,45,49]).

Нетрудно вычислить математическое ожидание $\bar{w}_i=M\tilde{w}_i$ и стандартное отклонение $s_i=\sqrt{D\tilde{w}_i}$ ($D\tilde{w}_i$ - дисперсия случайной величины $\tilde{w}_i$) i-го рандомизированного весового коэффициента (см. [49]):

$$\bar{w}_i=M\tilde{w}_i=\frac{1}{N(m,n)}\sum_{t=1}^{N(m,n)}w_i^{(t)}=\frac{1}{m}, \qquad (6)$$

$$s_i=\sqrt{D\tilde{w}_i}=\sqrt{\frac{1}{N(m,n)}\sum_{t=1}^{N(m,n)}\left[w_i^{(t)}-\bar{w}_i\right]^2}=\sqrt{\frac{m-1}{m^2(m+1)}+\frac{1}{n}\frac{m-1}{m(m+1)}}. \qquad (7)$$

Проиллюстрируем сказанное следующим примером. Пусть у нас имеется три отдельных показателя ($m=3$), относительная значимость которых измеряется весовыми коэффициентами w_1, w_2, w_3, отсчитываемыми с шагом $h=1/5=0.2$ ($n=5$). Тогда множество $W(3,5)$ всех возможных векторов весовых коэффициентов $w^{(t)}=(w_1^{(t)},w_2^{(t)},w_3^{(t)})$ состоит из $N(3,5)=21$ элементов, перечисленных в табл.1.

Таблица 1

Список всех возможных векторов весовых коэффициентов

$w^{(t)} = (w_1^{(t)}, w_2^{(t)}, w_3^{(t)})$ **при** $m = 3$**,** $n = 5$

t	$w_1^{(t)}$	$w_2^{(t)}$	$w_3^{(t)}$
1	0.0	0.0	1.0
2	0.0	0.2	0.8
3	0.0	0.4	0.6
4	0.0	0.6	0.4
5	0.0	0.8	0.2
6	0.0	1.0	0.0
7	0.2	0.0	0.8
8	0.2	0.2	0.6
9	0.2	0.4	0.4
10	0.2	0.6	0.2
11	0.2	0.8	0.0
12	0.4	0.0	0.6
13	0.4	0.2	0.4
14	0.4	0.4	0.2
15	0.4	0.6	0.0
16	0.6	0.0	0.4
17	0.6	0.2	0.2
18	0.6	0.4	0.0
19	0.8	0.0	0.2
20	0.8	0.2	0.0
21	1.0	0.0	0.0

По данным этой таблицы легко вычислить, используя формулы (6) и (7), математические ожидания $\overline{w}_i \approx 0.333$ и стандартные отклонения $s_i \approx 0.298$ рандомизированных весовых коэффициентов $\widetilde{w}_i$, $i = 1,2,3$. Полученные математические ожидания можно интерпретировать как оценки весовых коэффициентов, соответствующие ситуации, когда допустимы любые возможные вектора весовых коэффициентов. Этот результат может служить аргументом в пользу выбора одинаковых весовых коэффициентов в условиях полной неопределенности (в условиях отсутствия какой-либо информации о сравнительной значимости отдельных показателей). При этом не следует забывать о наличии значительного разброса (измеряемого, например, стандартными отклонениями $s_i \approx 0.298$) значений весовых коэффициентов вокруг полученных оценок $\overline{w}_i = 1/m \approx 0.333$.

Подставляя в выражение аддитивной свертки $Q_+(q;w)$ некоторый вектор весовых коэффициентов $w^{(t)} = (w_1^{(t)},...,w_m^{(t)})$ из множества всех возможных векторов весовых коэффициентов $W(m,n)$, мы получаем для оцениваемого объекта (энергетического комплекса, например), описываемого вектором отдельных показателей $q^{(j)} = (q_1^{(j)},...,q_m^{(j)})$, следующее значение сводного показателя:

$$Q_+^{(t)}(q^{(j)}) = Q_+(q^{(j)};w^{(t)}) = \sum_{i=1}^{m} w_i^{(t)} q_i^{(j)} . \tag{8}$$

Таким образом, многокритериальной оценке $q^{(j)}$ сопоставляется целый класс $\{Q_+^{(t)}(q^{(j)}),\ t \in T(m,n) = \{1,...,N(m,n)\}\}$ сводных оценок (не обязательно попарно различных).

Пусть, например, у нас имеются четыре оцениваемых объекта ($k = 4$), которым сопоставлены вектора исходных характеристик $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)})$, $j = 1,2,3,4$ (см. табл.2, где j - номер оцениваемого объекта)

Таблица 2

Значения исходных характеристик $x_i^{(j)}$**,** $i = 1,2,3,\ \ j = 1,2,3,4$

j	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$x_3^{(j)}$
1	1	2	3
2	3	2	1
3	2	3	2
4	3	1	3

Для получения значений отдельных показателей q_1, q_2, q_3 проведем простейшую линейную нормировку исходных характеристик x_1, x_2, x_3. При такой нормировке значению $x_i^{(j)} = 1$ исходной характеристики сопоставляется значение $q_i^{(j)} = 0$ отдельного показателя; значению $x_i^{(j)} = 3$ — значение $q_i^{(j)} = 1$; а значению $x_i^{(j)} = 2$ – $q_i^{(j)} = 0.5$. Таким образом получается табл.3, содержащая значения $q_i^{(j)}$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3,4$, отдельных показателей, составляющих многокритериальные оценки (строки табл.3) оцениваемых объектов.

Таблица 3

Значения отдельных показателей $q_i^{(j)}$**,** $i=1,2,3$**,** $j=1,2,3,4$

j	$q_1^{(j)}$	$q_2^{(j)}$	$q_3^{(j)}$
1	0	0.5	1
2	1	0.5	0
3	0.5	1	0.5
4	1	0	1

Теперь, используя формулу (8) и табл.3, сосчитаем все возможные значения $Q_+^{(t)}(q^{(j)}) = Q_+(q^{(j)}; w^{(t)})$, $t=1,...,21$, $j=1,2,3,4$, сводного показателя для четырех оцениваемых объектов (см. табл.4).

Таблица 4

Значения $Q_+^{(t)}(q^{(j)})$**,** $t=1,...,21$**,** $j=1,2,3,4$**, сводного показателя**

t	$Q_+^{(t)}(q^{(1)})$	$Q_+^{(t)}(q^{(2)})$	$Q_+^{(t)}(q^{(3)})$	$Q_+^{(t)}(q^{(4)})$
1	1.0	0.0	0.5	1.0
2	0.9	0.1	0.6	0.8
3	0.8	0.2	0.7	0.6
4	0.7	0.3	0.8	0.4
5	0.6	0.4	0.9	0.2
6	0.5	0.5	1.0	0.0
7	0.8	0.2	0.5	1.0
8	0.7	0.3	0.6	0.8
9	0.6	0.4	0.7	0.6
10	0.5	0.5	0.8	0.4
11	0.4	0.6	0.9	0.2
12	0.6	0.4	0.5	1.0
13	0.5	0.5	0.6	0.8
14	0.4	0.6	0.7	0.6
15	0.3	0.7	0.8	0.4
16	0.4	0.6	0.5	1.0
17	0.3	0.7	0.6	0.8
18	0.2	0.8	0.7	0.6

19	0.2	0.8	0.5	1.0

Теперь мы можем взять в качестве искомых сводных оценок исследуемых объектов (коммерческих банков), например, математические ожидания

$$\overline{Q}_{+}^{(j)} = M\,\widetilde{Q}_{+}^{(j)} = M\,Q_{+}(q^{(j)};\widetilde{w}) = \frac{1}{N(m,n)}\sum_{t=1}^{N(m,n)} Q_{+}^{(t)}(q^{(j)}) \qquad (9)$$

рандомизированных сводных показателей $\widetilde{Q}_{+}^{(j)} = Q_{+}(q^{(j)};\widetilde{w})$, $j = 1,\dots,k$. В качестве мер точности таких оценок естественно взять стандартные отклонения $S^{(j)} = \sqrt{D\widetilde{Q}_{+}^{(j)}}$, $j = 1,\dots,k$, определяемые формулой

$$S^{(j)} = \sqrt{D\widetilde{Q}_{+}^{(j)}} = \sqrt{\frac{1}{N(m,n)}\sum_{t=1}^{N(m,n)}\left[Q_{+}^{(t)}(q^{(j)}) - \overline{Q}_{+}^{(j)}\right]^{2}}\,. \qquad (10)$$

Подставив в формулы (9), (10) значения $Q_{+}^{(t)}(q^{(j)})$, $t = 1,\dots,21$, $j = 1,2,3,4$, сводного показателя из табл.4, получаем оценки $\overline{Q}_{+}^{(j)}$ и стандартные отклонения $S^{(j)} = \sqrt{D\widetilde{Q}_{+}^{(j)}}$, $j = 1,\dots,4$, приведенные в табл.5, где j - номер объекта, $\min(j)$ ($\max(j)$) - минимальное (максимальное) значение сводного показателя $Q_{+}^{(t)}$, $t = 1,\dots,N(m,n)$.

Таблица 5

Сводные оценки $\overline{Q}_{+}^{(j)}$ исследуемых объектов и соответствующие стандартные отклонения $S^{(j)} = \sqrt{D\widetilde{Q}_{+}^{(j)}}$, $j = 1,\dots,4$

j	$\overline{Q}_{+}^{(j)}$	$S^{(j)}$	$\min(j)$	$\max(j)$
1	0.500	0.258	0.000	1.000
2	0.500	0.258	0.000	1.000
3	0.667	0.149	0.500	1.000
4	0.667	0.298	0.000	1.000

Теперь осталось сосчитать вероятности $P(j,l)$, $j,l = 1,\dots,k$, попарного доминирования рандомизированных сводных показателей по формуле

$$P(j,l) = P\left(\left\{\widetilde{Q}_{+}^{(j)} > \widetilde{Q}_{+}^{(l)}\right\}\right) = \frac{N\left\{t : Q_{+}^{(t)}(q^{(j)}) > Q_{+}^{(t)}(q^{(l)})\right\}}{N(m,n)}, \qquad (11)$$

где $N\{t:\dots\}$ есть число элементов множества $\{t:\dots\}$.

В рассматриваемом примере найдем вероятность $P(3,2)$, применив формулу (11) к данным табл.4. Мы видим, что для $t=1,...,15$ выполнено неравенство $Q_+^{(t)}(q^{(3)})>Q_+^{(t)}(q^{(2)})$, а для $t=16,...,21$ - не выполнено. Следовательно, $P(3,2)=15/21\approx 0.714$. Аналогичные вычисления для всех остальных пар сводных показателей дают результаты, приведенные в табл.6.

Таблица 6

Вероятности $P(j,l)$, $j,l=1,2,3,4$, попарного доминировния рандомизированных сводных показателей

$j \backslash l$	1	2	3	4
1	0.000	0.429	0.286	0.333
2	0.429	0.000	0.286	0.333
3	0.714	0.714	0.000	0.476
4	0.571	0.571	0.524	0.000

Таким образом, описанная стохастическая дискретная модель неопределенности задания весовых коэффициентов позволяет сосчитать все величины, предусматриваемые простейшим вариантом МРСП: оценки весовых коэффициентов $\overline{w}_i$ и меры их точности - стандартные отклонения s_i, $i=1,...,m$; сводные оценки объектов $\overline{Q}_+^{(j)}$ и меры точности этих оценок - стандартные отклонения $S^{(j)}$, $j=1,...,k$; вероятности $P(j,l)$, $j,l=1,...,k$ попарного доминирования рандомизированных сводных показателей.

Напомним, что все указанные оценки получены в предположении полного отсутствия информации о сравнительной значимости отдельных показателей уровня измеряемого качества (надежности, эффективности, прибыльности и т.п.) объектов (сложных систем электроэнергетики). Такой большой дефицит информации о весовых коэффициентах является причиной малой точности (больших значений стандартных отклонений s_i, $i=1,...,m$, $S^{(j)}$, $j=1,...,k$) получаемых оценок и небольшой достоверности упорядочения объектов по степени предпочтительности (небольших отличий вероятностей $P(j,l)$, $j,l=1,...,k$, от уровня 0.5).

Модели учета нечисловой, неточной и неполной информации

В предыдущем пункте был описан крайний случай дефицита информации об относительной значимости отдельных показателей, а именно, случай полного отсутствия такой информации. В реальных ситуациях, однако, у исследователя имеется некоторая информация о весовых коэффициентах, но эта информация, как правило, не носит числового характера и может быть выражена лишь чисто сравнительными утверждениями типа "значимость отдельного показателя q_r выше значимости отдельного показателя q_s", "отдельные показатели q_u и q_v имеют примерно одинаковую значимость для сводной оценки" и т.п.

Далее мы будем предполагать, что эта *нечисловая информация* может быть представления в виде системы равенств и неравенств

$$OI = \{w_r > w_s;\ w_u = w_v,\ \ldots\} \tag{1}$$

для компонент вектора весовых коэффициентов $w = (w_1,\ldots,w_m)$, $w_i \ge 0$, $w_1 + \ldots w_m = 1$, определяющих относительную значимость отдельных показателей $q_1,\ldots,q_m$, $q_i \in [0,1]$, оценивающих исследуемое качество (надежность, эффективность, прибыльность и т.д.) данных объектов (сложных систем электроэнергетики, например) с точки зрения m различных отдельных критериев. Естественно назвать информацию о весовых коэффициентах, выражаемую системой равенств и неравенств (1), *ординальной* (*порядковой*) *информацией*.

Помимо ординальной информации исследователь может также иметь и *неточную информацию* о числовых значениях некоторых весовых коэффициентов, выражающуюся в виде системы

$$II = \{a_i \le w_i \le b_i,\ i \in \{1,\ldots,m\}\} \tag{2}$$

неравенств, указывающих возможные диапазоны $[a_i, b_i]$, $i \in \{1,\ldots,m\}$ варьирования весовых коэффициентов, где $0 \le a_i \le b_i \le 1$. Естественно назвать информацию о весовых коэффициентах, выражаемую системой неравенств (2), *интервальной информацией*.

Заметим, что интервальную форму информации можно использовать и для выражения суждений обо всей системе весовых коэффициентов в целом. Например, утверждение, что "отдельный показатель q_i имеет значимость, которую не превосходит значимость всех остальных отдельных показателей вместе взятых", можно представить в виде интервальной информации $\{w_i \ge 0.5\}$. Если же значимость еще одного отдельного показателя q_j не превосходит значимости показателя q_i и, одновременно, значимость всех остальных показателей вместе взятых не превосходит значимости показателя q_j, то для соответствующих весовых коэффициентов должны выполняться неравенства из системы

$$II = \{0.50 \le w_i \le 1.00,\ 0.25 \le w_j \le 0.5\}. \tag{3}$$

Разумеется, таким способом можно ввести интервальную информацию о любой цепочке убывающих значимостей отдельных показателей, каждая из которых превосходит совокупную значимость всех показателей, идущих после показателя, соответствующего данной значимости (ср. [38]).

Интервалы, задаваемые интервальной информацией II вида (2), зачастую могут быть существенно сужены за счет учета нормирующего соотношения $w_1 + ... + w_m = 1$ (см. [49, с.122]). Действительно, из указанного нормирующего соотношения следует, что если мы укажем неравенства $0 \le a_i \le w_i$, $i = 1,...,m$, $a_1 + ... + a_m = a \le 1$, ограничивающие весовые коэффициенты снизу, то получим неравенства

$$w_i = 1 - \sum_{k=1}^{i-1} w_k - \sum_{l=i+1}^{m} w_l \le 1 - \sum_{k=1}^{i-1} a_k - \sum_{l=i+1}^{m} a_l = 1 + a_i - \sum_{k=1}^{m} a_k = a_i + (1-a), \qquad (4)$$

ограничивающие весовые коэффициенты сверху. Аналогично, если мы укажем неравенства $w_i \le b_i \le 1$, $i = 1,...,m$, $b_1 + ... + b_m = b \ge 1$, ограничивающие весовые коэффициенты сверху, то получим неравенства

$$w_i = 1 - \sum_{k=1}^{i-1} w_k - \sum_{l=i+1}^{m} w_l \ge 1 - \sum_{k=1}^{i-1} b_k - \sum_{l=i+1}^{m} b_l = 1 + b_i - \sum_{k=1}^{m} b_k = b_i - (b-1), \qquad (5)$$

ограничивающие весовые коэффициенты снизу.

Таким образом, если имеется интервальная информация $II = \{a_i \le w_i \le b_i,\ i \in \{1,...,m\}\}$ вида (2), то эту информацию можно представить в виде системы

$$II = \{\max\{a_i, b_i - (b-1)\} \le w_i \le \min\{b_i, a_i + (1-a)\},\ i \in \{1,...,m\}\} \qquad (6)$$

неравенств, определяющих *согласованные интервалы* варьирования весовых коэффициентов.

Например, пусть имеется интервальная информация

$$II = \{0.1 \le w_1 \le 0.3;\ 0.1 \le w_2 \le 0.3;\ 0.3 \le w_3 \le 0.5\} \qquad (7)$$

о весовых коэффициентах w_1, w_2, w_3. Тогда, подставляя в (6) $a = 0.5$, $b = 1.1$, получаем систему

$$II^* = \{0.2 \le w_1 \le 0.3;\ 0.2 \le w_2 \le 0.3;\ 0.4 \le w_3 \le 0.5\} \qquad (8)$$

неравенств, определяющих интервалы, имеющие длины вдвое меньшие, чем длины соответствующих интервалов, определенных неравенствами исходной системы (7).

Сокращение интервалов возможного варьирования весовых коэффициентов можно добиться и сопоставляя интервальную информацию II с ординальной информацией OI (см. [49, с.152-154]). Пусть, например, помимо исходной интервальной информации

$$II = \{0.3 \le w_1 \le 0.5;\ 0.1 \le w_2 \le 0.4\} \qquad (9)$$

о весовых коэффициентах w_1, w_2, имеется еще и ординальная информация

$$OI = \{w_1 < w_2\} \qquad (10)$$

об этих весовых коэффициентах. Синтез указанных двух видов информации позволяет получить интервальную информацию

$$II^* = \{0.3 \le w_1 \le 0.4;\ 0.3 \le w_2 \le 0.4\}, \qquad (11)$$

определяющую интервалы, имеющие меньшие длины, по сравнению с длинами интервалов, определенных исходной интервальной информацией (9).

Объединяя системы неравенств вида (1) и (2), мы получаем *нечисловую и неточную информацию* $I = OI \cup II$ о сравнительной значимости отдельных показателей оцениваемого качества исследуемых объектов. При этом возможно, что эта объединенная информация не однозначно определяет вектор весовых коэффициентов. Поэтому далее мы будем говорить о *нечисловой (ординальной), неточной (интервальной) и неполной информации* (*ннн-информации*) I о весовых коэффициентах $w_1,\dots,w_m$ (о сравнительной значимости отдельных показателей $q_1,\dots,q_m$).

Посмотрим теперь, как ннн-информация может быть учтена в описанной в предыдущем пункте дискретной модели неопределенности задания весовых коэффициентов. Рассмотрим множество

$$W(m,n;I) = \{w^{(t)} = (w_1^{(t)},\dots,w_m^{(t)}) : w^{(t)} \in W(m,n), t \in T(m,n;I)\}, \qquad (12)$$

состоящее из тех векторов весовых коэффициентов, которые входят в множество $W(m,n)$ всех возможных векторов с дискретными компонентами и удовлетворяют системе всех равенств и неравенств, определяемых ннн-информацией I. Для простоты записи далее будем полагать, что множество $T(m,n;I)$ состоит из *перенумерованных* возможных значений индекса t: $T(m,n;I) = \{1,\dots,N(m,n;I)\}$.

Множество $W(m,n;I)$ будем называть *множеством всех допустимых* (с точки зрения ннн-информации I) *векторов весовых коэффициентов*. Понятно, что множество всех допустимых векторов весовых коэффициентов $W(m,n;I)$ является подмножеством множества всех возможных векторов весовых коэффициентов $W(m,n)$. Эти два множества совпадают в случае отсутствия ограничений на весовые коэффициенты, т.е. в случае "пустоты" системы неравенств и равенств I ($I = \varnothing$), являющейся следствием полного отсутствия даже ннн-информации о весовых коэффициентах: $W(m,n;\varnothing) = W(m,n)$.

Очевидно, что в общем случае $W(m,n;I) \subseteq W(m,n)$ и $N(m,n;I) \le N(m,n)$. Если же система I содержит хотя бы одно нетривиальное равенство и/или неравенство, имеют место строгие неравенства: $W(m,n;I) \subset W(m,n)$ и $N(m,n;I) < N(m,n)$. При этом возможно весьма существенное уменьшение числа допустимых векторов $N(m,n;I)$ по сравнению с исходным числом $N(m,n)$ всех возможных векторов весовых коэффициентов. Например, если мы работаем с пятимерными векторами весовых коэффициентов $w=(w_1,...,w_m)$, компоненты которых отсчитываются с шагом $h=0.05$ ($n=1/h=20$), то имеется $N(5,20)=10626$ возможных векторов весовых коэффициентов. Учет же ннн-информации

$$I = \{w_1 > w_2 > w_3 > w_4 > w_5;\ 0.05 \le w_5\} \qquad (13)$$

редуцирует это число всех возможных векторов до числа $N(5,20;I)=7$ всех допустимых векторов весовых коэффициентов.

Промоделируем неопределенность выбора конкретного вектора весовых коэффициентов $w=(w_1,...,w_m)$ из множества всех допустимых векторов $W(m,n;I)$ при помощи рандомизации этого выбора. В результате имеем рандомизированный вектор весовых коэффициентов $\tilde{w}(I)=(\tilde{w}_1(I),...,\tilde{w}_m(I))$, представляющий собой дискретную случайную величину, равномерно распределенную на множестве $W(m,n;I)$.

Нетрудно вычислить математическое ожидание $\overline{w}_i(I)=M\,\tilde{w}_i(I)$ и стандартное отклонение $s_i=\sqrt{D\,\tilde{w}_i(I)}$ ($D\,\tilde{w}_i(I)$ - дисперсия случайной величины $\tilde{w}_i(I)$) i-го рандомизированного весового коэффициента (см. [90]):

$$\overline{w}_i(I) = M\,\tilde{w}_i(I) = \frac{1}{N(m,n;I)} \sum_{t=1}^{N(m,n;I)} w_i^{(t)}, \qquad (14)$$

$$s_i(I) = \sqrt{D\,\tilde{w}_i(I)} = \sqrt{\frac{1}{N(m,n;I)} \sum_{t=1}^{N(m,n;I)} \left[w_i^{(t)} - \overline{w}_i(I)\right]^2}\ . \qquad (15)$$

Проиллюстрируем сказанное, продолжив изложение примера из предыдущего пункта. Пусть у нас имеется три отдельных показателя ($m=3$), относительная значимость которых измеряется весовыми коэффициентами w_1, w_2, w_3, отсчитываемыми с шагом $h=1/5=0.2$ ($n=5$). Тогда множество $W(3,5)$ всех возможных векторов весовых коэффициентов $w^{(t)}=(w_1^{(t)},w_2^{(t)},w_3^{(t)})$ состоит из $N(3,5)=21$ элементов, перечисленных в табл.1 пункта 2.1. Введем дополнительную ннн-информацию

$$I_1 = \{w_1 > w_2;\ w_3 \le 0.2\} \qquad (16)$$

и сформируем множество всех допустимых векторов весовых коэффициентов $W(m,n;I_1)=W(3,5;I_1)$ из тех векторов $w^{(t)}=(w_1^{(t)},w_2^{(t)},w_3^{(t)})$, компоненты которых удовлетворяют неравенствам системы (16). Просмотрев табл.1 предыдущего пункта, мы видим, что ограничениям, соответствующим информации I_1, удовлетворяют векторы с номерами 17-21. Эти векторы (перенумерованные) приведены в табл.1, где индекс t пробегает множество $T(m,n;I) = T(3,5;I_1) = \{1,2,3,4,5\}$; $N(m,n;I) = N(3,5;I_1) = 5$.

Таблица 1

Список всех допустимых векторов весовых коэффициентов
$w^{(t)} = (w_1^{(t)}, w_2^{(t)}, w_3^{(t)})$ **при** $I_1 = \{w_1 > w_2;\ w_3 \le 0.2\}$

t	$w_1^{(t)}$	$w_2^{(t)}$	$w_3^{(t)}$
1	0.6	0.2	0.2
2	0.6	0.4	0.0
3	0.8	0.0	0.2
4	0.8	0.2	0.0
5	1.0	0.0	0.0

По данным этой таблицы легко вычислить, используя формулы (14) и (15), математические ожидания $\overline{w}_i(I_1)$ и стандартные отклонения $s_i(I_1)$ рандомизированных весовых коэффициентов $\widetilde{w}_i(I_1)$, $i = 1,2,3$, приведенные в табл.2, где i - номер отдельного показателя. В этой же таблице указаны минимальные ($\min(i)$, $i = 1,2,3$) и максимальные ($\max(i)$), $i = 1,2,3$) значения весовых коэффициентов из табл.1.

Таблица 2

Оценки весовых коэффициентов $\overline{w}_i(I_1)$ и меры их точности $s_i(I_1)$, $i = 1,2,3$, при ннн-информации $I_1 = \{w_1 > w_2;\ w_3 \le 0.2\}$

i	$\overline{w}_i(I_1)$	$s_i(I_1)$	$\min(i;I_1)$	$\max(i)$
1	0.760	0.150	0.600	1.000
2	0.160	0.150	0.000	0.400
3	0.080	0.098	0.000	0.200

Полученные математические ожидания можно интерпретировать как искомые оценки весовых коэффициентов, соответствующие ннн-информации I_1, что позволяет назвать вектор оценок $\overline{w}(I) = (\overline{w}_1(I_1),...,\overline{w}_3(I_1))$ *числовым образом нечисловой, неточной и неполной информации* I_1.

Теперь осталось сосчитать вероятности $p(r,s;I)$, $r,s = 1,...,m$, попарного доминирования рандомизированных весовых коэффициентов $\widetilde{w}_i(I)$, $i = 1,...,m$, по формуле

$$p(r,s;I) = P\left(\left\{\tilde{w}_r(I) > \tilde{w}_s(I)\right\}\right) = \frac{N\left\{t : w_r^{(t)} > w_s^{(t)}\right\}}{N(m,n;I)}, \qquad (17)$$

где $N\{t:...\}$ есть число элементов множества $\{t:...\}$. Вероятность $p(r,s;I)$ можно интерпретировать как *меру достоверности доминирования* рандомизированного весового коэффициента $\tilde{w}_r(I)$ над аналогичным коэффициентом $\tilde{w}_s(I)$, определяемую по ннн-информации I.

В рассматриваемом примере найдем вероятность $p(1,2;I_1)$, применив формулу (17) к данным табл.1. Мы видим, что для всех $t = 1,...,5$ выполнено неравенство $w_1^{(t)} > w_2^{(t)}$. Следовательно, $p(1,2;I_1) = 1$. Аналогичные вычисления для всех остальных пар рандомизированных весовых коэффициентов дают результаты, приведенные в табл.3.

Таблица 3

Вероятности $p(r,s;I_1)$, $r,s = 1,2,3$, попарного доминирования рандомизированных весовых коэффициентов

$r \setminus s$	1	2	3
1	0.000	1.000	1.000
2	0.000	0.000	0.400
3	0.000	0.200	0.000

Результаты вычисления оценок весовых коэффициентов (математических ожиданий рандомизированных весовых коэффициентов) $\tilde{w}_i(I)$, $i = 1,...,m$, мер их точности (стандартных отклонений) $s_i(I)$, $i = 1,...,m$, и мер достоверности (вероятностей) попарного доминирования $p(r,s;I)$, $r,s = 1,...,m$, удобно представлять в виде диаграммы, приве денной для случая $I = I_1 = \{w_1 > w_2;\ w_3 \le 0.2\}$ на рис.1.

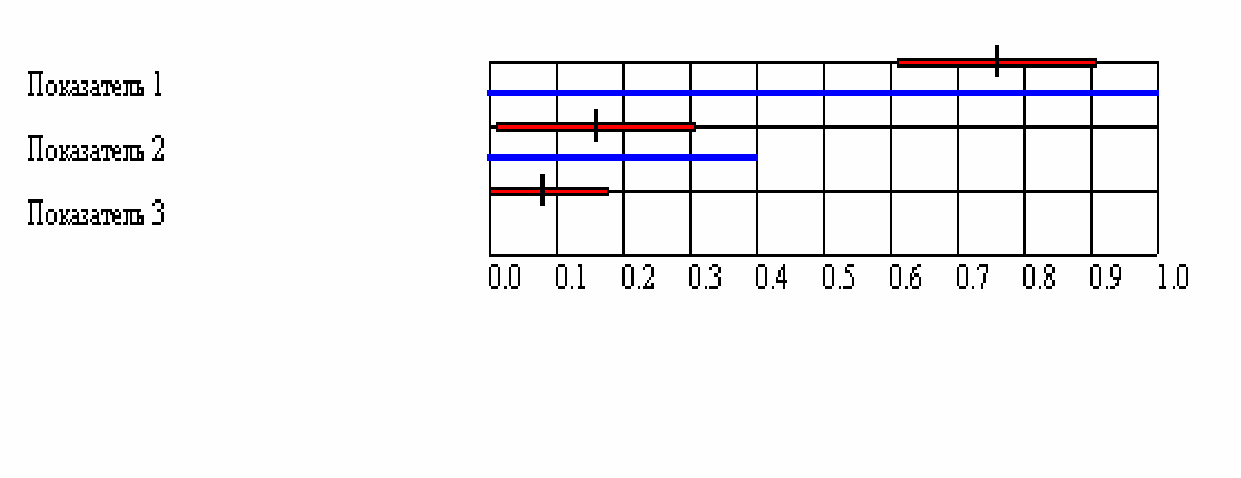

Рис. 1. Диаграмма для весовых коэффициентов при $I_1 = \{w_1 > w_2;\ w_3 \le 0.2\}$

Информация, содержащаяся в табл.2, 3, наглядно представлена на диаграмме рис.1. Здесь отмеченным серединам жирных черно-красных отрезков соответствуют оценки $\overline{w}_i(I_1)$, $i = 1,2,3$ весовых коэффициентов соответствующих отдельных показателей (величину $\overline{w}_i(I_1)$ можно узнать, спроектировав середину соответствующего отрезка на ось абсцисс). Длина каждого такого отрезка равна удвоенному стандартному отклонению $s_i(I_1)$, $i = 1,2,3$, а правые концы голубых отрезков, расположенных между жирными черно-красными отрезками, указывают вероятность доминирования рандомизированного весового коэффициента, соответствующего верхнему отрезку, над рандомизированным весовым коэффициентом, соответствующим отрезку, лежащему непосредственно под верхним отрезком.

Подставляя в выражение аддитивной свертки $Q_+(q;w)$ некоторый вектор весовых коэффициентов $w^{(t)} = (w_1^{(t)},\dots,w_m^{(t)})$ из множества всех допустимых векторов весовых коэффициентов $W(m,n;I)$, мы получаем для оцениваемого объекта (коммерческого банка), описываемого вектором отдельных показателей $q^{(j)} = (q_1^{(j)},\dots,q_m^{(j)})$, следующее значение сводного показателя:

$$Q_j^{(t)}(I) = Q_+^{(t)}(q^{(j)};I) = Q_+(q^{(j)};w^{(t)};I) = \sum_{i=1}^{m} w_i^{(t)} q_i^{(j)} . \qquad (18)$$

Таким образом, многокритериальной оценке $q^{(j)}$ сопоставляется целый класс $\{Q_+^{(t)}(q^{(j)};I),\ t \in T(m,n;I) = \{1,\dots,N(m,n:I)\}\}$ сводных оценок (не обязательно попарно различных).

Возвращаемся к нашему примеру (см. пункт 2.2), в котором у нас имеются четыре оцениваемых объекта ($k = 4$), которым сопоставлены вектора исходных характеристик $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)})$, $j = 1,2,3,4$ (см. табл.2 пункта 2.2). В табл.3 пункта 2.2 содержатся значения $q_i^{(j)}$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3,4$, отдельных показателей, составляющих многокритериальные оценки (строки этой таблицы) оцениваемых объектов.

Теперь, используя ннн-информацию $I_1 = \{w_1 > w_2;\ w_3 \le 0.2\}$, выделим из табл.4 пункта 2.2 все допустимые (с точки зрения информации I_1) значения $Q_+^{(t)}(q^{(j)}) = Q_+(q^{(j)}; w^{(t)})$, $t = 1,\dots,5$, $j = 1,2,3,4$, сводного показателя для четырех оцениваемых объектов (см. табл.4, где индекс t пробегает перенумерованные значения $1,\dots,N(3,5;I_1) = 5$).

Таблица 4

Допустимые значения $Q_+^{(t)}(q^{(j)})$, $t = 1,\dots,5$, $j = 1,2,3,4$, сводного показателя при ннн-информации $I_1 = \{w_1 > w_2;\ w_3 \le 0.2\}$

t	$Q_+^{(t)}(q^{(1)})$	$Q_+^{(t)}(q^{(2)})$	$Q_+^{(t)}(q^{(3)})$	$Q_+^{(t)}(q^{(4)})$
1	0.3	0.7	0.6	0.8
2	0.2	0.8	0.7	0.6
3	0.2	0.8	0.5	1.0
4	0.1	0.9	0.6	0.8
5	0.0	1.0	0.5	1.0

Теперь мы можем взять в качестве искомых сводных оценок исследуемых объектов (коммерческих банков), например, математические ожидания (см. [49, с.141])

$$\overline{Q}_+^{(j)}(I) = M\,\widetilde{Q}_+^{(j)}(I) = M\,Q_+(q^{(j)}; \widetilde{w}(I)) = \frac{1}{N(m,n;I)} \sum_{t=1}^{N(m,n;I)} Q_+^{(t)}(q^{(j)}) \qquad (19)$$

рандомизированных сводных показателей $\widetilde{Q}_+^{(j)}(I) = Q_+(q^{(j)}; \widetilde{w}(I))$, $j = 1,\dots,k$. В качестве мер точности таких оценок естественно взять стандартные отклонения $S^{(j)}(I) = \sqrt{D\widetilde{Q}_+^{(j)}(I)}$, $j = 1,\dots,k$, определяемые формулой (см. [49, с.141])

$$S^{(j)}(I) = \sqrt{D\widetilde{Q}_+^{(j)}(I)} = \sqrt{\frac{1}{N(m,n;I)} \sum_{t=1}^{N(m,n;I)} \left[Q_+^{(t)}(q^{(j)}) - \overline{Q}_+^{(j)}(I)\right]^2}\ . \qquad (20)$$

Подставив в формулы (19), (20) значения $Q_+^{(t)}(q^{(j)})$, $t = 1,\dots,5$, $j = 1,2,3,4$, сводного показателя из табл.4, получаем оценки $\overline{Q}_+^{(j)}(I_1)$ и стандартные отклонения $S^{(j)}(I_1) = \sqrt{D\widetilde{Q}_+^{(j)}(I_1)}$, $j = 1,\dots,4$, приведенные в табл.5, где j - номер объекта, $Min(j;I_1)$ ($Max(j;I_1)$) - минимальное (максимальное) значение сводного показателя $Q_+^{(t)}$, $t = 1,\dots,N(m,n;I) = N(3,5;I_1)$.

Таблица 5

Сводные оценки $\overline{Q}_{+}^{(j)}(I_1)$ исследуемых объектов и соответствующие стандартные отклонения $S^{(j)}(I_1)=\sqrt{D\widetilde{Q}_{+}^{(j)}(I_1)}$, $j=1,...,4$

j	$\overline{Q}_{+}^{(j)}(I_1)$	$S^{(j)}(I_1)$	$Min(j;I_1)$	$Max(j;I_1)$
1	0.160	0.102	0.000	0.300
2	0.840	0.102	0.700	1.000
3	0.580	0.075	0.500	0.700
4	0.840	0.150	0.600	1.000

Теперь осталось сосчитать вероятности $P(j,l;I)$, $j,l=1,...,k$, попарного доминирования рандомизированных сводных показателей по формуле

$$P(j,l;I)=P\left(\left\{\widetilde{Q}_{+}^{(j)}(I)>\widetilde{Q}_{+}^{(l)}(I)\right\}\right)=\frac{N\left\{t:Q_{+}^{(t)}(q^{(j)})>Q_{+}^{(t)}(q^{(l)})\right\}}{N(m,n;I)}, \qquad (21)$$

где $N\{t:...\}$ есть число элементов множества $\{t:...\}$ (см. [49, с.141])..

В рассматриваемом примере найдем вероятность $P(4,3;I_1)$, применив формулу (21) к данным табл.3. Мы видим, что для $t=1,3,4,5$ выполнено неравенство $Q_{+}^{(t)}(q^{(4)})>Q_{+}^{(t)}(q^{(3)})$, а для $t=2$ - не выполнено. Следовательно, $P(4,3;I_1)=4/5=0.800$. Аналогичные вычисления для всех остальных пар сводных показателей дают результаты, приведенные в табл.6.

Таблица 6

Вероятности $P(j,l;I_1)$, $j,l=1,2,3,4$, попарного доминирования рандомизированных сводных показателей

$j\backslash l$	1	2	3	4
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	1.000	0.000	1.000	0.400
3	1.000	0.000	0.000	0.200
4	1.000	0.400	0.800	0.000

Информация, содержащаяся в табл.5, 6, наглядно представлена на диаграмме рис.2. Здесь отмеченным серединам жирных черно-красных отрезков соответствуют оценки $\overline{Q}_{+}^{(j)}(I_1)$, $j=1,2,3,4$, сводных показателей надежности (величину $\overline{Q}_{+}^{(j)}(I_1)$ можно узнать, спроектировав середину соответствующего отрезка на ось абсцисс). Длина каждого такого отрезка равна удвоенному стандартному отклонению $S^{(j)}(I_1)$, $j=1,2,3,4$, а правые концы голубых отрезков, расположенных между жирными черно-красными отрезками, указывают вероятность доминирования рандомизированного сводного показателя надежности, соответствующего верхнему отрезку, над сводным показателем, соответствующим отрезку, лежащему непосредственно под верхним отрезком.

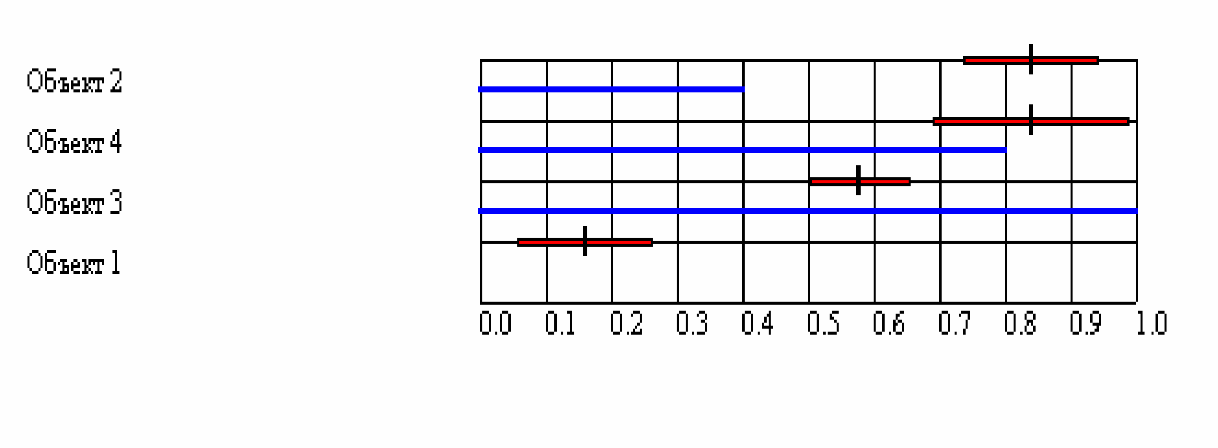

Рис. 2. Диаграмма для сводных показателей при $I_1 = \{w_1 > w_2;\ w_3 \le 0.2\}$

Диаграмма, приведенная на рис.2, наглядно представляет рейтинг (ранжировку) четырех исследуемых объектов (скажем, сложных систем электроэнергетики) по изучаемому качеству (скажем, по надежности): практически не различающиеся между собой (вероятности доминирования $P(2,4;I_1)=P(4,2;I_1)=0.400$ мало отличаются от величины 0.5, соответствующей полной статистической неразличимости соответствующих рандомзированных сводных показателей) объекты 2 и 4 довольно достоверно доминируют объект 3 ($P(2,3;I_1)=1.000$, $P(4,3;I_1)=0.800$), который достоверно доминирует объект 1 ($P(3,1;I_1)=1$).

Сравнивая табл.5, 6 в § 1.2 с аналогичными табл.5, 6 настоящего пункта, мы видим на данном конкретном примере обычный результат учета ннн-информации I: повышается точность оценок весовых коэффициентов $\overline{w}_i(I)$, $i=1,...,m$, и сводных показателей $\overline{Q}_+^{(j)}$, $j=1,...,k$ (уменьшаются стандартные отклонения $s_i(I)$ и $S^{(j)}(I)$ соответственно) и увеличивается достоверность рейтингования (ранжировки) как весовых коэффициентов, так и сводных показателей (приближаются к единице многие вероятности доминирования $p(r,s;I)$, $r,s=1,...,m$, и $P(j,l;I)$, $j,l=1,...,k$, соответственно).

Таким образом, описанная стохастическая дискретная модель неопределенности задания весовых коэффициентов позволяет учитывать любую дополнительную нечисловую, неточную и неполную информацию о сравнительной весомости отдельных показателей, что делает эту дискретную модель весьма гибким средством синтеза сводных показателей сложных многопараметрических объектов.

Для практических расчетов, необходимых для реализации стохастической модели неопределенности задания весовых коэффициентов, можно использовать оболочку системы поддержки принятия решений (ОСППР) АСПИД-3W (см. [10,23,42,47,9049,67,71,77]). В основу программного обеспечения ОСППР АСПИД-3W положены формулы и комбинаторные алгоритмы, описанные, например, в работах [17,22,25,28,31-33,39,43,44,46,52,55-57,59,70,76,78]. Удачной модификацией этой СППР представляется система DSS Polychoice 2.05 фирмы POLYIDEA Ltd. (London, GB).

К настоящему времени накоплен определенный опыт использования СППР типа АСПИД-3W для решения задач построения сводных показателей различных качеств различных сложных систем различного масштаба и назначения. Среди примеров применения метода рандомизированных сводных показателей следует упомянуть следующие темы: сводные показатели экологической безопасности и устойчивости функционирования энергетических систем [61-64,71-72]; сводные показатели сложных финансово-экономических объектов и процессов [10,23,53]; сводные показатели эффективности деятельности российских и зарубежных коммерческих банков [8,9,11,12,19,75]; оценка эффективности деятельности транснациональных компаний на основе сводных показателей состояния их активов [41]; построение сводных рейтингов страховых компаний [61]; оценка потребительской ценности экономических благ по иерархической системе характеристик [54]; построение сводных показателей финансовых рисков в условиях неопределенности [26]; сводные оценки вариантов состояния финансово-экономической среды реализации долгосрочных проектов [13]; построение сводных оценок инвестиционного климата различных стран [40]; сводные оценки инвестиционной привлекательности корпоративных акций [50]; индексная оценка качества продукции промышленности синтетического каучука [24,54]; интегральная оценка экологического состояния и качества среды [3,73,74,79]; сводные оценки экологического состояния и устойчивости природных биогеоценозов [14-16,35,36,37]; комплексная оценка воздействия геопатогенных зон на биологические системы [47]; построение сводных оценок качества и эффективности сложных технических систем [47,48]; комплексная оценка качества морских судов [30]; сводные показатели эффективности сложных систем вооружения и научно-исследовательских работ оборонного назначения [20,21,58] и т.д.

Заключение

В настоящем докладе предлагается использовать метод рандомизированных сводных показателей (МРСП) для оценивания в условиях дефицита информации эффективности функционирования объектов электроэнергетики.

Во Введении обосновывается формализация задачи оценки объектов электроэнергетики в виде задачи построения сводного показателя эффективности по совокупности отдельных показателей эффективности работы этих объектов.

В первой части излагаются основы теории сводных показателей (индексов) сложных многопараметрических объектов и обосновывается использование простейшей аддитивной свертки отдельных показателей в единый показатель, представляющий собой, таким образом, взвешенное среднее арифметическое отдельных индексов эффективности.

Возникающая проблема использования разработанного метода сводных показателей (МСП) в условиях дефицита числовой информации о весовых коэффициентах (т.е., информации об оценках значимости отдельных показателей эффективности) решается (во второй части) за счет процедуры рандомизации неопределенности задания. весовых коэффициентов. Рандомизированные (случайные) весовые коэффициенты индуцируют рандомизированные сводные показатели, что позволяет редуцировать задачу сравнения двух сложных объектов по совокупности критериев к хорошо изученной задаче сравнения двух соответствующих случайных (рандомизированных) сводных показателей.

Показано, что предлагаемый метод рандомизированных сводных показателей (МРСП) позволяет учитывать всю нечисловую (ординальную, порядковую), неточную (интервальную) и неполную информацию, имеющуюся у исследователя.

Приведен конкретный пример применения МРСП, реализованного на ЭВМ в виде системы поддержки принятия решений (СППР) АСПИД-3W, для сравнительной оценки вариантов проведения комплекса мероприятий по повышению надежности функционирования подсистемы энергоснабжения. Несмотря на наличие только ординальной (порядковой) экспертной информации о сравнительной важности отдельных компонент подсистемы энергоснабжения, удается вполне достоверно упорядочить по степени предпочтительности рассматриваемые варианты проведения комплекса мероприятий по повышению надежности.

Проведенное математическое обоснование МРСП и практическая апробация этого метода позволяют рекомендовать метод рандомизированных сводных показателей в качестве гибкого и надежного инструмента оценки эффективности сложных многопараметрических объектов электроэнергетики.

Литература

1. Азгальдов Г.Г., Азгальдова Л.А. Количественная оценка качества. М., 1971.
2. Азгальдов Г.Г., Райхман Э.П. О квалиметрии. М., 1973.
3. Алимов А.Ф., Дмитриев В.В., Хованов Н.В., Чистобаев А.И. Интегральная оценка экологического состояния и качества среды городских территорий. СПб., СПб НЦ РАН, 1999.
4. Андрианов Ю.М., Лопатин М.В. Квалиметрические аспекты управления качеством новой техники. Л., 1983.
5. Андрианов Ю.М., Субетто А.И. Квалиметрия в приборостроении и машиностроении. Л., 1990.
6. Богданчук В.З., Егоров Б.М., Катулев А.Н. Агрегирование векторных критериев. Л., 1990.
7. Вишняков И.В. Экономико-математические модели оценки деятельности коммерческих банков. СПб., СПбГУ, 1999.
8. Вишняков И.В. Применение метода сводных показателей для оценки деятельности российских коммерческих банков // Актуальные проблемы финансов и банковского дела. СПб., СПбГИЭУ, 2001. С. 103-110.
9. Вишняков И.В., Довгаль В.В., Хованов Н.В. Анализ динамики надежности коммерческих банков // Математические методы в социально-экономических исследованиях. СПб., Петрополис, 1996. С. 8-33.
10. Вишняков И.В., Михайлов М.В., Хованов Н.В. Методика оценивания финансово-экономических объектов с использованием системы поддержки принятия решений АСПИД-3. СПб., СПбГУ, 1998.
11. Вишняков И.В., Хованов Н.В. Использование метода рандомизированных сводных показателей для оценивания в условиях неопределенности качества коммерческих банков // Тезисы докладов Всероссийской конференции "Нейроинформатика и нестандарт-

ные методы обработки экономических данных". Красноярск, 1998. С.15.
12. Вишняков И.В., Хованов Н.В. Система нормативов надежности коммерческих банков. СПб., 1999.
13. Горшков А.С., Мясников А.В., Хованов Н.В. Прогнозирование эволюции сложных систем в условиях неопределенности // Материалы 6-й международной конференции «Анализ, прогнозирование и управление в сложных системах». Т. 2. СПб., СЗАГС, 2005. С. 168-174.
14. Дмитриев В.В., Мякишева Н.В., Третьяков В.Ю., Хованов Н.В. Многокритериальная оценка экологического состояния и устойчивости геосистем на основе метода сводных показателей. II. Трофический статус водных экосистем // Вестник СПбГУ. 1997. № 7. С. 51-67.
15. Дмитриев В.В., Мякишева Н.В., Хованов Н.В. Многокритериальная оценка экологического состояния и устойчивости геосистем на основе метода сводных показателей. I. Качество природных вод // Вестник СПбГУ. 1996. № 21. С. 40-52.
16. Догановский Ф.М., Мякишева Н.В. Построение комплексных индексов внешнего водообмена озер в условиях неопределенности и дефицита гидрологической информации // Водные ресурсы. 2002. Том 29. № 3. С. 284-291.
17. Евсеев А.В., Корников В.В., Хованов Н.В. Рандомизированная линейная свертка критериев // Вопросы механики и процессов управления. Вып.14. Л., ЛГУ, 1991. С. 157-161.
18. Кирута Ф.Я., Рубинов А.М., Яновская Е.Б. Оптимальный выбор распределений в сложных социально-экономических задачах. Л., 1980.
19. Колари Дж. В, Федотов Ю.В., Хованов Н.В. Построение в условиях дефицита информации сводных показателей деятельности коммерческих банков // Вестник СПбГУ. 1995. № 5. С. 79-88.
20. Колганов С.К., Корников В.В., Попов П.Г., Хованов Н.В. Построение в условиях дефицита информации сводных оценок сложных систем. М., Радио и связь, 1994.
21. Колганов С.К., Корников В.В., Попов П.Г., Хованов Н.В. Построение в условиях дефицита информации сводных оценок сложных систем. Часть вторая. Рандомизированный синтез сводных оценок. М., Радио и связь, 1998.
22. Колесникова О.Н., Корников В.В., Рожков Н.Н., Хованов Н.В. Стохастические процессы с равновероятными монотонными реализациями, моделирующие дефицит информации // Вестник ЛГУ. 1987. № 1. С. 21-26.

23. Колесов Д.Н., Михайлов М.В., Хованов Н.В. Оценка сложных финансово-экономических объектов с использованием системы поддержки принятия решений АСПИД-3W. СПб., ОЦЭиМ, 2004.
24. Кормер В.А., Бабурин Б.Г., Хованов Н.В., Дмитриев В.С., Дубин М.П. Методические рекомендации по разработке и внедрению индексной оценки качества продукции промышленности синтетического каучука. М., ЦНИИТЭНХ, 1982.
25. Корников В.В., Серегин И.А., Хованов Н.В. Байесовская модель обработки нечисловой, неточной и неполной информации о весовых коэффициентах // Сборник докладов Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям "SCM-2000". СПб., РАН, 2000. С. 104-107.
26. Корников В.В., Серегин И.А., Хованов Н.В. Многокритериальное оценивание финансовых рисков в условиях неопределенности. СПб., СПбГУ, 2002.
27. Корников В.В., Серегин И.А., Хованов Н.В. Комплексная оценка воздействия геопатогенных зон на биологические системы // Вопросы механики и процессов управления. Вып. 18. СПб., СПбГУ, 2000. С. 113-117.
28. Корников В.В., Скитович В.П., Хованов Н.В. Статистические методы анализа эффективности и надежности сложных систем в условиях дефицита информации // Вопросы механики и процессов управления. Вып.9. Л., ЛГУ, 1986. С. 84-116.
29. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М., 1983.
30. Малышев В.В., Хованов Н.В. Оценка качества судов при неполных проектных данных // Судостроение. 1990. № 8. С. 3-5.
31. Махмудов З.М. Стохастическая модель дефицита информации при выборе весовых коэффициентов в сводном показателе // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып.87. Ташкент, АН Узб. ССР, 1989. С. 150-159.
32. Махмудов З.М. Учет дополнительной информации при рандомизированном синтезе сводных показателей // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып.88. Ташкент, АН Узб. ССР, 1990. С. 114-122.
33. Махмудов З.М. Учет ограничений при моделировании неопределенности выбора весовых коэффициентов // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып.90. Ташкент, АН Узб. ССР, 1990. С. 20-27.
34. Михайлов М.В. Модель рейтингования страховых компаний // Вестник СПбГУ. 1997. № 26. С. 103-106.

35. Мякишева Н.В., Огурцов А.Н., Хованов Н.В. Опыт использования стохастических моделей дефицита информации в эколого-географических исследованиях // Сборник докладов Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям “SCM-2000”. СПб., РАН, 2000. С. 75-78.
36. Огурцов А.Н., Хованов Н.В. Многокритериальная оценка экологического состояния и устойчивости геосистем на основе метода сводных показателей. III. Оценка степени благоприятности природных условий макрорегионов Северо-Запада РФ для жизни людей // Вестник СПбГУ. 1997. № 14. С. 55-62.
37. Огурцов А.Н., Хованов Н.В. АСПИД-картографирование оценок экологического состояния и устойчивости географических систем // Материалы Международной конференции «ГИС для устойчивого развития (InterCarto-9)». Новороссийск-Севастополь, РАН, 2003. С. 370-377.
38. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М., 1975.
39. Рожков Н.Н. Рандомизированный критерий сравнения качества сложных объектов // Экономика и математические методы. Том 27. Вып.3. М., АН СССР, 1991. С. 597-600.
40. Сутырин С.Ф., Хованов Н.В. Инвестиционный климат в России: проблемы оценки // Мировая и национальная экономика: история и современность. Казань, 1995. С. 140-141.
41. Федотов Ю.В., Хованов Н.В. Оценка эффективности деятельности транснациональных корпораций // Материалы конференции «Концепции и инструменты эффективного менеджмента». Санкт-Петербург, 28 октября 2005 г. СПб., Издательский дом СПбГУ, 2005. С. 29-30.
42. Хованов К.Н., Хованов Н.В. Система поддержки принятия решений АСПИД-3W (Анализ и Синтез Показателей при Информационном Дефиците). Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 960087 от 22.03.1996. Российское агентство по правовой охране программ для ЭВМ, баз данных и топологии интегральных микросхем (РосАПО). М., 1996.
43. Хованов Н.В. Формальная схема составления интегрального прогноза по совокупности экспертных оценок // Исследование свойств полупроводниковых пленок и методов обработки информациию Элиста, Калмыцкий госуниверситет, 1972. С. 51-58.
44. Хованов Н.В.Алгоритм упорядочения векторов мнений комитета экспертов // Прикладные методы исследования процессов принятия решений. Владивосток, ДВНЦ АН СССР, 1976. С.39-40.

45. Хованов Н.В. Математические основы теории шкал измерения качества. Л., ЛГУ, 1982.
46. Хованов Н.В. Стохастические модели теории квалиметрических шкал. Л., ЛГУ, 1986.
47. Хованов Н.В. АСПИД - система квалиметрических методов оценивания в условиях дефицита информации качества сложных технических объектов // Методология и практика оценивания качества продукции. Л., ЛДНТП, 1988. С. 56-61.
48. Хованов Н.В. Применение метода А.Н. Крылова для оценки в условиях дефицита информации эффективности и качества сложных объектов // Тезисы докладов Всесоюзной научно-практической конференции "Квалиметрия в обеспечении научно-технического и социального прогресса". Саратов, ИСЭПРАПК, 1988. С. 115-116.
49. Хованов Н.В. Анализ и синтез показателей при информационном дефиците. СПб., СПбГУ, 1996.
50. Хованов Н.В. Построение сводного показателя инвестиционной привлекательности акций российских предприятий // Материалы Всероссийской научной конференции "Инвестиционная политика России в современных условиях". СПб., СПбГУ, 1997. С. 2-3.
51. Хованов Н.В. Математические модели риска и неопределенности. СПб., СПбГУ, 1998.
52. Н.В.Хованов Три типа математических моделей неопределенности // Измерительная техника. 2005. N 9. С. 39-44.
53. Хованов Н.В. Оценка сложных экономических объектов и процессов в условиях неопределенности. К 95-летию метода сводных показателей А.Н. Крылова // Вестник С.-Петербургского ун-та. Серия 5. 2005. Вып.1. С.138-144.
54. Хованов Н.В., Бабурин Б.Г., Васенев Ю.Б., Михайлов М.В. Оценка потребительской ценности экономических благ по иерархической системе показателей качества // Применение математики в экономике. Сборник статей. Выпуск 16. СПб., СПбГУ, 2006. С. 34-67.
55. Хованов Н.В., Еремеев Н.Е. Три подхода к арифметизации ординальных шкал // Механика управляемого движения. Вып.3. Л., ЛГУ, 1979. С.183-190.
56. Хованов Н.В., Колесникова О.Н. Об одном подходе к ориентации системы программ математической статистики на обработку результатов нечисловых измерений качества // Системы и методы автоматизации научных исследований. М., Наука, 1981. С.76-79.

57. Хованов Н.В., Корников В.В. Стохастические процессы и поля, порождаемые рандомизированными параметрами. Вестник ЛГУ. 1984 (Деп. ВИНИТИ, № 894-84, - 26 с.).
58. Хованов Н.В., Корников В.В. Рандомизированный синтез сводных показателей при оценивании в условиях дефицита информации эффективности и качества сложных многопараметрических объектов // Системный анализ при создании кораблей, комплексов вооружения и военной техники. СПб., ВМА, 1998. С. 239-246.
59. Хованов Н.В., Мачевариани Л.М. Алгоритмы генерации монотонных функций // Приложение асимптотических методов в математической физике и статистике. Л., ЛГУ, 1985. С. 3-14.
60. Штойян Д. Качественные свойства и оценки стохастических моделей. М., 1979.
61. Afgan N., Carvalho M., Hovanov N. Energy systems assessment with sustainability indicators // Energy Policy. 2000. Volume 28. P. 603-612.
62. Afgan N., Carvalho M., Hovanov N. Multi-criteria sustainability assessment of clean air technologies // Transactions of Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture of University of Zagreb. 2002. Volume 26. Number 1. P. 1-14.
63. Afgan, N., Carvalho M., Hovanov N. Multi-Criteria Sustainability Assessment of Clean Air Technologies // CLEAN AIR – International Journal on Energy for a Clean Environment. 2004. Vol. 5. No. 2. P. 107-124
64. Afgan N., Carvalho M., Hovanov N. Modeling of energy system sustainability index // Thermal Science. 2005. Vol. 9. No. 2. P. 3-15.
65. Bawa V. Stochastic dominance: a research bibliography // Management Sci. 1981. Vol.28. P.698-712.
66. Blyth C. Some probability paradoxes in choice from among random alternatives // J. Amer. Stat. Assoc. 1972. Vol.67. N.338. P.366-373.
67. Dahl K., Dovgal M., Hovanov N. Applied DSS for multi-criteria estimation under uncertainty: from ASPID-3 to GINGER // International Workshop "Mathematical Methods and Tools in Computer Simulation". SPb., SPbGU, 1994. P. 71-72.
68. Fishburn P. Stochastic dominance and the foundation of mean-variance analysis // Res. Finan. Grenwich (Conn.). Vol.2. 1980. P.69-97.
69. Heilmann W. Ordering of distributions and risk management // D. Gesell. Versicherungsmath. 1986. Vol.17. N.3. S.225-235.
70. Hovanov N. Stochastic processes induced by random parameters: applications to economics // Proceedings of the International Confer-

ence “Asymptotic Methods in Probability and Mathematical Statistics”. SPb., RAS, 1998. P. 118-121.
71. Hovanov N. ASPID-method: Analysis and Synthesis of Parameters under Information Deficiency // Lectures on Eurosummer School “Sustainability Assessment of Clean Air Technologies”. Lisbon, Instituto Superior Technico, 2000. P. 2-64.
72. Hovanov N. General indices of sustainability synthesis under uncertainty // Lectures on Eurosummer School “Sustainability Assessment of New and Renewable Energy Systems”. Lisbon, Instituto Superior Technico, 2000. P. 1-71
73. Hovanov N., Fedotov Yu., Zacharov V. Large-scale ecological systems’ indices hierarchic aggregation under uncertainty // Abstracts of the International Conference “INDEX-99”. SPb., RAS, 1999. P. 58.
74. Hovanov N., Fedotov Yu., Zakharov V. The making of index numbers under uncertainty // Pykh Yu. (Ed.) Environmental Indices: Systems Analysis Approach. Oxford, EOLSS Publishers Co., 1999. P. 83-99.
75. Hovanov N., Kolari J. Estimating the overall financial performance of Mexican banks using a new method for quantifying subjective information // The Journal of Financial Engineering, 1998, vol.7, No.1, pp.59-77.
76. Hovanov N., Kornikov V., Seregin I. Multi-criteria estimation under uncertainty // Proceedings of the International AMSE Conference "Signals, Data, Systems". Vol. I. Hyderabad (India), 1994. P. 83-91.
77. Hovanov N., Kornikov V., Seregin I. Qualitative information processing in DSS ASPID-3W for complex objects estimation under uncertainty // Proceedings of the International Conference "Informatics and Control". SPb., SPbGU, 1997. P. 808-816.
78. Hovanov N., Kornikov V., Seregin I. Randomized synthesis of fuzzy sets as a technique for multicriteria decision making under uncertainty // Proceedings of the International Conference "Fuzzy Logic and Applications". Zichron Yaakov (Israel), 1997. P. 281-288.
79. Hovanov N., Kornikov V., Tokin I. A mathematical methods system of decision making for developmental strategy under uncertainty // K. Kondratief (Ed.) Global Environmental Change. Perspective of Remote Sensing and Geographic Information Systems. New Delhi, Oxford & IBH Publ. Co., 1995. P. 93-96.