NP класс и NP-полные задачи

Вопросы и ответы про NP, P и т.д.

Что такое класс P?

P – класс задач, *решаемых* за **полиномиальное** (от размера входа) время. Примеры таких задач: задача о существовании пути в графе, задача о взаимно простых числах и т.д.

Что такое полиномиальное время?

Говорят, что алгоритм работает за полиномиальное время, если время работы *ограничено сверху* многочленом от размера входа алгоритма, то есть $T(n)=O(n^k)$ для некоторой константы k.

(Примерами задач являются целочисленное сложение, умножение, деление, взятие остатка от деления, умножения матриц, выяснение связности графов, сортировка множества из n чисел, нахождение эйлерова цикла на графе из m рёбер, обнаружение в тексте длиной n некоторого слова, построение покрывающего дерева минимальной стоимости)

Что такое класс NP?

NP – класс задач, *верифицируемых* (проверяемых) за **полиномиальное** время. Альтернативное определение: класс задач, решаемых за полиномиальное время на *недетерминированной машине Тьюринга*. Примеры таких задач: задача о выполнимости булевой формулы, задача о вершинном покрытии, задача о клике и т.д.

Как доказать, что задача принадлежит классу NP?

Существует два варианта:

1. Привести алгоритм решения задачи, работающий полиномиальное время на недетерминированной машине Тьюринга.
2. Описать сертификат и привести алгоритм верификации, работающий полиномиальное время на детерминированной машине Тьюринга.

Сертификат – дополнительная информация, позволяющая быстро решить задачу. Важно помнить, что размер сертификата должен быть полиномиален относительно размера самой задачи.

Алгоритм верификации – принимает на вход *экземпляр* задачи и сертификат к нему, а возвращает ответ к задаче, 0 или 1.

Грубо говоря, к классу NP относятся те задачи, правильность решения которых можно

проверить быстро (за полиномиальное время). К классу P относятся задачи, которые можно быстро решить. Далее рассмотрим подробнее задачи, связанные с классом NP.
В тексте есть слова, выделенные *курсивом*. Убедитесь, что хорошо понимаете их значение, порой оно связано со смежными науками.

Какие задачи называются NP-трудными?

Это задачи, к которым *сводимы* все задачи из класса NP за полиномиальное время. При этом не требуется, чтобы сама задача принадлежала классу NP, она может быть более сложной.

Что значит, что одна задача водима к другой за полиноминальное время?

Это значит, что существует полиномиальная функция, которая *отображает* экземпляр первой задачи в экземпляр второй задачи. Если входная задача соответствует положительному решению, то и выходная задача соответствует положительному решению. Если входная задача соответствует отрицательному решению, то и решение выходной задачи отрицательно.

Какие подходы к решению NP-трудных задач?

- Полный перебор (Brute force)
- Приближенное решение (с оценкой точности и с вероятностью ошибки)
- Стремление к полиномиальному решению в среднем (в худшем случае задача остается нерешаемой за полиномиальное время)

Какие задачи называются NP-полными?

NP-трудные задачи, принадлежащие классу NP.

Примеры: 3Sat, задача о вершинном покрытии (множество вершин, такое, что, у каждого ребра графа хотя бы один из концов входит в вершину из него) и т.д.

Как доказать, что задача является NP-трудной?

Существует два варианта:

1. (Практически никогда не используется) Доказать, что все задачи из класса NP сводится к данной. Таким способом была определена первая NP-трудная (и -полная) задача – Sat.
2. (Основной) Доказать, что к данной задаче сводится (за полиномиальное время) какая-нибудь NP-трудная задача. Отсюда следует, что все задачи можно свести к данной, так как любую задачу из NP можно свести к NP-трудной задаче, а ее в свою очередь к данной.

Как доказать, что задача является NP-полной?

- Доказать, что она NP-трудная.
- Доказать, что она принадлежит NP.

Общая схема и проблема $NP=P$

Гипотеза $NP=P$

Существует гипотеза $P=NP$ (одна из центральных проблем теории алгоритмов). Гипотеза гласит, что **если решение задачи можно быстро проверить, то саму задачу можно быстро решить**. Гипотезу не могут ни опровергнуть, ни доказать уже более 30 лет.

Данная проблема является одной из задач тысячелетия. За ее решение Математический институт Клэя назначил премию в миллион долларов США.

Общая схема классов

Обратим внимание на знаки **==?** на рисунке. Если хотя бы одна **NP-полная** (иначе говоря NPC) задача будет принадлежать классу P, то все остальные задачи из класса NP также будут принадлежать классу P. Говоря на “языке рисунка”: *из синей стрелки следуют синие пунктирные стрелки*. Именно так должно доказываться равенство $NP=P$.

Но тем не менее, ни одной NP-полной задачи, которая принадлежала бы классу P, не было найдено.

— *Облизанов Александр*

From:
http://se.moevm.info/ - **se.moevm.info**

Permanent link:
http://se.moevm.info/doku.php/courses:algorithms_building_and_analysis:materials:np_full_tasks_notes

Last update: **2022/12/10 09:08**